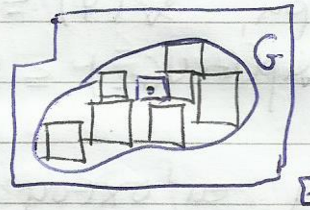
$V(G) = \sup\{ v(Y) : Y \underset{\sigma\tau o\iota\chi}{\subseteq} G \} \leq V(E)$, G φραγμένο $\subseteq E$



Πρόταση

G_1, G_2 φραγμένα, ανοιχτά

$V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2)$ (1)

$V(\cup G_\nu) \leq \Sigma V(G_\nu)$ (2)

Απόδειξη

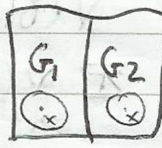
Έστω Y στοιχ. $\subseteq G_1 \cup G_2$ αφού γνωρίζουμε ότι

$V(G_1 \cup G_2) = \sup\{ V(Y) : Y \underset{\sigma\tau o\iota\chi.}{\subseteq} G_1 \cup G_2 \}$

Y ως στοιχειώδες $\Rightarrow Y$ κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y$ συμπαγές $\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall x \in Y)$:

$B(x, \varepsilon) \subseteq G_1$ ή $B(x, \varepsilon) \subseteq G_2$;



$Y \subseteq G_1 \cup G_2$

Τότε $\forall\, x \in Y$:

$B(x, \varepsilon) \subseteq G_1$ ή $B(x, \varepsilon) \subseteq G_2$

Έστω το κιγκλίδωμα $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο χαρακτηρίζει το Y σαν στοιχ. σύνολο

Υποθέτουμε ότι τα βασικά σύνολα $I_1, \dots, I_k \in \mathcal{D}(\Pi)$ και ξένα μεταξύ τους :

$Y = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$

$Y_1 \subseteq G_1$, $Y_2 \subseteq G_2$

ένωση των βασ. διαστ. της G_1 — ένωση των βασ. διαστ. της G_2

Θδο $Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$

Για τυχαίο $x \in Y$ τότε $\exists\, I = \mathcal{D}(\Pi)$, $x \in I$

και έστω $z \in I$, τότε $d(x, z) \leq \operatorname{diam} I < \varepsilon$

τότε $z \in B(x, \varepsilon)$

Αλλά, τέτοιες μπάλες ανήκουν ή στο G_1 ή στο G_2

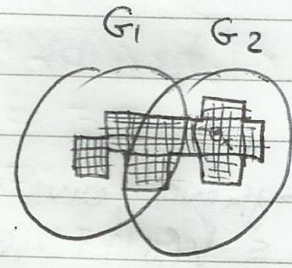
Δηλ. $I \subseteq G_1$ ή $I \subseteq G_2$ τότε $I \subseteq G \Rightarrow Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$

$\Rightarrow I \subseteq Y_1$ ή $\Rightarrow I \subseteq Y_2$ $\Rightarrow I \subseteq Y_1 \cup Y_2$

τουτέστιν, $V(Y) \leq V(Y_1) + V(Y_2) \leq V(G_1) + V(G_2)$

Άρα, $V(Y) \leq V(G_1) + V(G_2)$

$V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2)$ (1)



Για τη σχέση (2) τώρα:
Ας είναι Y στοιχ. σύνολο
$Y \subseteq \bigcup G_\nu$.
Y συμπαγ $\Rightarrow \exists \{G_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ ανοιχτή κάλυψη του Y η οποία έχει πεπερ. υποκάλυψη $G_{\nu_1}, G_{\nu_2}, \dots, G_{\nu_k}$
Έτσι ώστε: $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{\nu_i}$,
όπου $V(\bigcup_{i=1}^{k} G_{\nu_i}) \geq V(Y)$
Εφαρμόζοντας τη σχέση (1) k-φορές

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_{\nu_i}\right) = V\left(G_{\nu_1} \cup \bigcup_{i=2}^{k} G_{\nu_i}\right) \leq V(G_{\nu_1}) + V\left(\bigcup_{i=2}^{k} G_{\nu_i}\right) \leq \dots$$

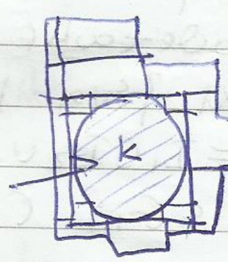
$$\dots \leq V(G_1) + V(G_2) + \dots + V(G_k) = \sum_{i=1}^{k} V(G_{\nu_i}) \leq$$
$$\leq \sum V(G_\nu).$$

Ορισμός

Έστω K συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow (\exists I) : K \subseteq I : K \subseteq I^\circ$

$V(K) = \inf\{V(Y) : \underset{Y \text{ στοιχ}}{K \subseteq} Y^\circ\}$

Προσέγγιση του μέτρου του K



Συνέπεια του ορισμού
$K_1 \subseteq K_2$ συμπαγή σύνολα
αφού $K_2 \subseteq I$ το I στοιχ.
υπερσύνολο του K_2 και κατά
συνέπεια $K_1 \subseteq I$ το I στοιχ
υπερσύνολο του K_1.
Τότε, $V(K_1) \leq V(K_2)$.

Πρόταση:

Έστω K_1, K_2 συμπαγή με K_1, K_2 ξένα μεταξύ τους.

$V(K_1 \cup K_2) \geq V(K_1) + V(K_2)$.

Απόδειξη

Έστω λοιπόν K_1 και έστω K_2 συμπαγή & ξένα

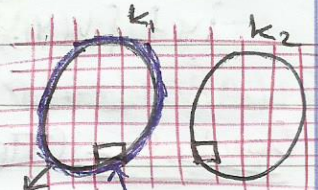
τότε $\exists \varepsilon > 0$: $a(K_1, K_2) > 3\varepsilon \to \frac{1}{3} a(K_1, K_2) > \varepsilon$

Δίχως βλάβη

Θεωρούμε $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ στοιχειώδες με $K_1 \cup K_2 \subseteq Y^\circ$

Επίσης, θεωρούμε ότι το π κιγκλίδωμα που χαρακτηρίζει το Y γεννά βασικά διαστήματα I με $\text{diam}\, I < \varepsilon$ και θεωρούμε Θ την συλλογή των παραπάνω I. Ορίζουμε Y_i.

$Y_i := \bigcup \{ I \in \Theta : I \cap B(K_i, \varepsilon) \neq \emptyset \}$, $i = 1,2$



τα K_i έχουν στοιχεία τους τα τετραγωνάκια (ή βασ. διαστ.)

το γύρω γύρω μπλε κέντρο το K_1 και ακτίνα ε (το χρωματισμένο μπλε).

Θ.δ.ο

i) $K_1 \subseteq Y_1^\circ$, $K_2 \subseteq Y_2^\circ$

ii) $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$

iii) $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$

---

i) Έστω στοιχείο $x \in Y \setminus Y_1^\circ$ και θ.δ.ο $x \in (K_1)^c \Rightarrow x \notin K_1$

$Y \setminus Y_1^\circ$ κλειστό $\Rightarrow \exists x_\nu \in Y \setminus Y_1$: $\lim x_\nu = x$

τότε $\exists x_{k_\nu} \in I$ με $I \subseteq Y \setminus Y_1^\circ$ και $x_{k_\nu} \to x$, $x \in I$

(βρήκαμε ένα διάστημα I, όπου το $x \in I$.)

Όπως I συμπαγές και $\lim x_{k_\nu} = x$ και $\{x_{k_\nu}\} \subseteq \{x_\nu\}$

τότε $I \notin Y$ και άρα $I \not\subset K_1 \Rightarrow x \notin K_1 \Rightarrow K_1 \subseteq Y_1^\circ$

(όμοια το $K_2 \subseteq Y_2^\circ$)

ii) Έστω $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : x \in Y_1$ και $x \in Y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 \in Y_1$ και $I_2 \in Y_2$: $x \in I_1$ και $x \in I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 = I_2 = I$ (γεωμετρικά φαίνεται παράλογο)

Έτσι, $I_1 \in Y_1$ και $I_2 \in Y_2 \Rightarrow I \cap B(K_1, \varepsilon) \neq \emptyset$ και $I \cap B(K_2, \varepsilon) \neq \emptyset$

$x_1, x_2 \in I$ και $\text{diam}\, I \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq \text{diam}\, I < \varepsilon$

Θεωρούμε $y_i \in k_i$ τ/ω $d(x_i, y_i) < \varepsilon$

$d(y_1,y_2) \le d(y_1,x_1)+d(x_1,y_2) \le d(y_1,x_1)+d(x_1,x_2)+d(x_2,y_2)$

$d(x_1,x_2) \ge d(y_1,y_2) - d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2) >$

$> a(k_1,k_2) - \varepsilon - \varepsilon =$

$= a(k_1,k_2) - 2\varepsilon =$

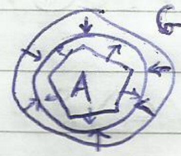
$\ge 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$ (άτοπο)

αφού ανήκουν και τα δύο στο ίδιο σύνολο I όπου διαμ$(I) < \varepsilon$

iii) $V(k_1)+V(k_2) \le V(Y_1)+V(Y_2) = V(Y_1\cup Y_2) \le V(Y)$

$\inf\{V(Y) :$ Y στοιχ $\wedge$ $k_1\cup k_2 \subseteq Y_1^{\circ}\} = V(k_1\cup k_2)$

Ορισμός 1 (Προσέγγιση χωριτικότητας)



Έστω A φραγμένο σύνολο

1) Τότε ορίζουμε εξωτερικό μέτρο του A:
$\overline{V}(A) = \inf\{V(G) : A\subseteq G$, G ανοιχτό$\}$ → ει χωρο καταλ

2) Τότε ορίζουμε εσωτερικό μέτρο του A:
$\underline{V}(A) = \sup\{V(K) : K\subseteq A$, K συμπαγές$\}$ → ει χωριτικότητα μπορεί να λάβει

Πρόταση

Για κάθε A φραγμένο σύνολο
$\underline{V}(A) \le \overline{V}(A)$.

Αποδ

Θεωρούμε K, G τ/ω $K\subseteq A\subseteq G$, K συμπ., G: ανοιχτ

$K\subseteq A\subseteq G \Rightarrow V(K) \le V(G) \Longrightarrow$

① $V(K) \le \inf\{V(G) : A\subseteq G$, G ανοιχτό$\}$

② $\sup\{V(K) : K\subseteq A$, K συμπ.$\} \le V(G)$

Τότε $\underline{V}(A) \le \overline{V}(A)$

Πρόταση

A_1, A_2 φραγμένα σύνολα τότε

$$\overline{V}(A_1 \cup A_2) \leq \overline{V}(A_1) + \overline{V}(A_2) \quad (1)$$

Αν επιπλέον A_1, A_2 είναι και ξένα, τότε

$$\underline{V}(A_1 \cup A_2) \geq \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) \quad (2)$$

Απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$

$\exists G_1$ ανοιχτό $A_1 \subseteq G_1$

$V(G_1) \leq \inf\{V(G) : A_1 \subseteq G \quad G \text{ ανοιχτό}\} + \varepsilon$

$V(G_1) \leq \overline{V}(A_1) + \varepsilon$, ομοίως επίσης ισχύει:

$V(G_2) \leq \overline{V}(A_2) + \varepsilon$

$A_1 \cup A_2 \subseteq G_1 \cup G_2 \Rightarrow V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{V}(A_1 \cup A_2) \leq V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2) \leq \overline{V}(A_1) + \overline{V}(A_2) + \varepsilon$

ομοίως για τη σχέση (2) (προς τα κάτω)

Ορισμός

Ένα φραγμένο σύνολο A καλείται μετρήσιμο αν $\overline{V}(A) = \underline{V}(A)$.

Η κοινή τιμή παριστάνεται απλά με $V(A)$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_b$ τη συλλογή όλων των μετρήσιμων φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

Πχ

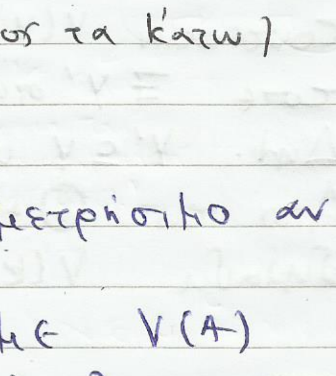
Ποιο το εμβαδό ενός σημείου στον $\mathbb{R}^2$;

Απάντηση

$I = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Τότε $\forall Y : \{(\alpha, b)\} \subseteq Y^{\circ}$

είναι $V(I) = 4\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.



Πρόταση

Η συλλογή $\mathcal{J}_b$ περιέχει όλα τα συμπαγή $\subseteq \mathbb{R}^n$

Αποδ

Έστω K συμπαγές τότε για $K' \subseteq K \Rightarrow$

$\Rightarrow V(K') \leq V(K) \overset{\forall K}{\Rightarrow} \sup\{V(K') : K' \subseteq K, K' \text{ συμπ}\} \leq V(K)$

$\Rightarrow \underline{V}(K) \leq V(K)$ ①

Επίσης,

$V(K) \leq \sup\{V(K') : K' \subseteq K, K' \text{ συμπαγ.}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(K) \leq \underline{V}(K)$ ②

Από ①+② $\rightarrow V(K) = \underline{V}(K)$ ③

Από την άλλη μεριά $\overline{V}(K) \leq V(K)$ ④

Διότι αν $\overline{V}(K) > V(K)$ τότε $\exists Y \subseteq \mathbb{R}^n$ στοιχ.

τέτοιο $K \subseteq Y^\circ$ και $V(Y) < \overline{V}(K) \rightarrow V(Y) < V(G)\ \forall G, K \subseteq G$

Τουλάχιστον $V(Y) < V(Y^\circ)$ με Y° ανοιχτό

τότε $\exists Y'$ στοιχ $\subseteq Y^\circ$ και $V(Y) < V(Y')$

Δηλ. $Y' \subseteq Y$ και $V(Y) < V(Y')$ (άτοπο)

Από τις ③+④ $\rightarrow V(K) = \underline{V}(K) \leq \overline{V}(K) \leq V(K)$

δηλαδή $V(K) = \underline{V}(K) = \overline{V}(K) \rightarrow K$ μετρήσιμο

Πρόταση

Η συλλογή $\mathcal{J}_b$ περιέχει όλα τα φραγμένα και ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

(όμοια απόδειξη με την παραπάνω)

Πρόταση

$A_1, A_2 \in \mathcal{J}_b$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ τότε

$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}_b$ και $V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$

Αποδ

A_1, A_2 φραγμένα $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ φραγμένο

$\overline{V}(A_1 \cup A_2) \leq \overline{V}(A_1) + \overline{V}(A_2) \overset{A_1, A_2 \in \mathcal{J}_b}{=\!=} V(A_1) + V(A_2)$

A_1, A_2 ξένα $\rightarrow \underline{V}(A_1 \cup A_2) \geq \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) \overset{A_1, A_2 \in \mathcal{J}_b}{=\!=} \overline{V}(A_1) + \overline{V}(A_2)$